## Corrigés des exercices 1.1 à 1.25 : | حلول التمارين من 1.1 إلى 25.1

**Exercice1.1**

Les deux charges placées en $A$ et $C$ sont de signes contraires, donc, elles s'attirent. Si on pose $AC = x$, alors la force d'attraction est égale à :

$$F_{AC} = 9.10^9 \frac{|2q||-q|}{x^2} \Rightarrow F_{AC} = 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2}$$

Les deux charges placées en $B$ et $C$ sont de signes contraires, donc, elles s'attirent aussi. Puisque $BC = d - x$, la force d'attraction est égale à :

$$F_{BC} = 9.10^9 \frac{|q||-q|}{(d-x)^2} \Rightarrow F_{BC} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2}$$

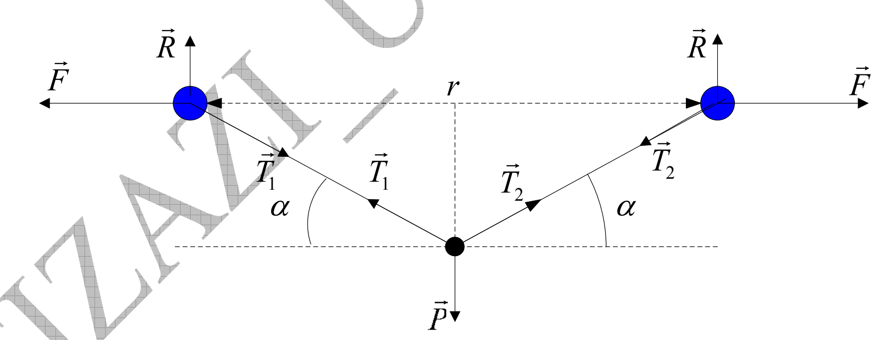
La charge placée en $C$, est donc soumise à deux forces électriques qui ne peuvent s'équilibrer que si elles sont directement opposées. Cela ne peut se réaliser que si $C$ est situé entre $A$ et $B$. D'où :

$$F_{AC} = F_{BC} \Rightarrow 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{(d-x)^2} \\ d = 0,2 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 - 0,8x + 0,08 = 0 \Rightarrow \boxed{x = AC = 0,117m}$$

**Exercice1.2**

La base de la solution de cet exercice est la figure géométrique ci-dessous :




Le système est en équilibre : $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ , avec $\vec{F}$ la force électrostatique de répulsion.

Au centre de la masse $m$ on peut écrire : $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, avec $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}|$

On projette sur l'axe vertical : $2.T.\sin\alpha - P = 0 \Rightarrow T = \dfrac{P}{2\sin\alpha} \rightarrow (1)$

Au centre de l'un des ballons : $\vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$; avec $\vec{R}$ la poussée d'Archimède.

Par projection sur l'axe horizontal : $F - T\cos\alpha = 0 \Rightarrow F = T\cos\alpha \rightarrow (2)$

De $(1)$ et $(2)$, on obtient l'expression de la force $\vec{F}$ qui est :

$$F = \frac{P.\cos\alpha}{2.\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{F = \frac{P}{2}\cot\alpha}$$

D'après la loi de Coulomb :

$$F = k.\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow k.\frac{q^2}{r^2} = \frac{P}{2}.\cot\alpha \Rightarrow q^2 = \frac{P}{2}.\frac{r^2}{k}\cot\alpha \Rightarrow \boxed{q = r\sqrt{\frac{P}{2.}\frac{\cot\alpha}{k}}.}$$

Or est inconnue, c'est pour cela qu'on doit la déterminer géométriquement :

$$\boxed{r = 2l\cos\alpha}$$

La dernière étape reste l'application numérique :

$$\left.\begin{array}{l} P = mg = 5.10^{-2}N \\ cot\pi/6=1,732 \\ r=1,732 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q = 3,8.10^{-6}N = 3,8\mu C}$$

**Exercice1.3**

1/ La boule chargée est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ . Puisque la tension $U_{AB}$ est positive, le champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté vers $B$, c'est-à-dire vers le plus petit potentiel.

On applique la relation fondamentale de la dynamique à la boule pour déduire l'expression de l'accélération instantanée acquise :

$\vec{j}$ $O$ $\vec{i}$ $\vec{F} = q\vec{E}$ $\vec{P} = m\vec{g}$

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}$$

Ecrivons l'expression de l'accélération dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{g} = -g.\vec{j} \\ \vec{E} = E\vec{i} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}E.\vec{i} - g.\vec{j}$$

La vitesse initiale est nulle. La vitesse instantanée est la fonction primitive de l'accélération. Partant des composantes de la vitesse linéaire, on arrive aux deux équations horaires du mouvement de la boule, sans oublier la position initiale du mobile : $\left(t = 0\ ,\ x_0 = \frac{1}{2}d\ ,\ y_0 = L = 1m\right)$

$$a_x = \frac{q}{m}E \Rightarrow v_x = \frac{q}{m}E.t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E.t^2 + \frac{1}{2}d \rightarrow (1)$$

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = -gt \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + 1 \rightarrow (2)$$

Par élimination du temps entre les équations horaires on obtient l'équation de la trajectoire de la boule :

$$t^2 = \frac{2m}{qE}\left(x - \frac{1}{2}d\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left[\frac{2m}{qE}\left(x - \frac{1}{2}d\right)\right] + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{mg}{qE}x + \frac{mg}{qE}\frac{d}{2} + 1} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{10^7}{E}x + \frac{2.10^5}{E} + 1}$$

**La trajectoire de la boule est rectiligne**.

2/ On remplace dans l'équation horaire $(2)$ , l'ordonnée par zéro afin d'obtenir l'instant du passage de la boule par le plan $y = 0$ :

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0,447 s}$$

3/ Pour calculer la tension, on doit calculer d'abord le champ électrique au point $(d,0)$. On remplace dans l'équation de la trajectoire les deux coordonnées par leurs valeurs respectives :

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{10^7}{E} x + \frac{2.10^5}{E} + 1 \\ x = d = 0,04 m \\ y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = 2.10^5 V m^{-1}}$$

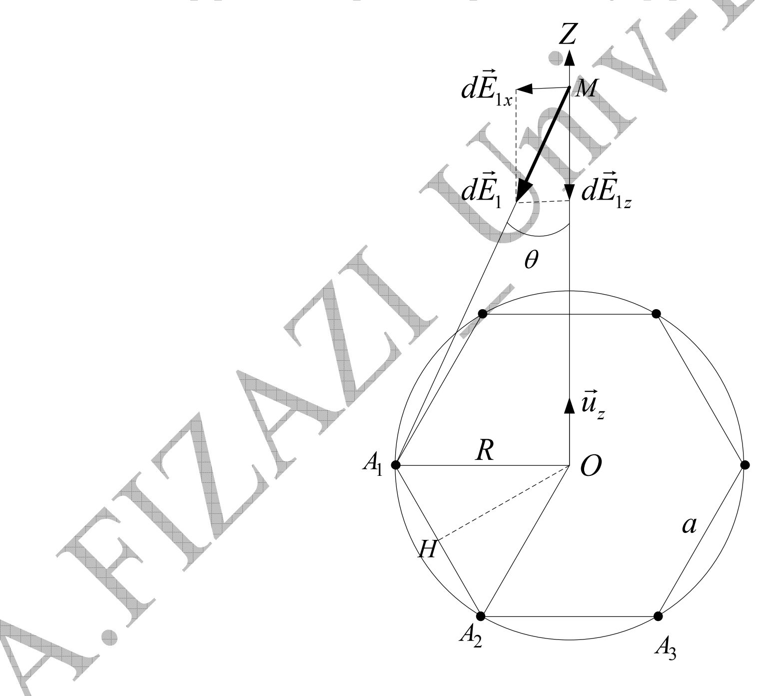
La tension est donc : $\boxed{U = Ed}$ , $\boxed{U = 8.10^3 V}$

**Exercice1.4**

La distribution de la charge n'est pas continue. Le champ électrostatique est porté par l'axe à cause de la symétrie du polygone par rapport à l'axe $Oz$ : $E_z = E\cos\theta$ .

Soit $R$ le rayon du cercle dans lequel est inscrit le polygone.

Calcul du champ produit au point $M$ par la charge $q$ placée au point $A_1$ .






$$\left.\begin{array}{l} E_{1z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(A_1M\right)^2} \cos\theta \\ \cos\theta = \frac{OM}{A_1M} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \end{array}\right| \Rightarrow E_{1z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Chaque côté est vu depuis le centre sous l'angle $\frac{2\pi}{n}$ . En exploitant la figure, on a :

$$\left.\begin{array}{l} A_1H = \frac{a}{2} = R\sin\widehat{A_1OH} \\ \widehat{A_1OH} = \frac{2\pi}{n}/2 \Rightarrow \widehat{A_1OH} = \frac{\pi}{n} \end{array}\right| \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

Le champ électrique résultant est égal à la somme des champs produits par chacune des charges ponctuelles $\vec{E} = \vec{E}_z = \sum_1^n \vec{E}_{iz}$ :

Donc :

$$\boxed{\vec{E}_z = n\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z}$$

2/ Dans le cas d'un triangle équilatéral on a $n = 3$ , d'où le champ électrostatique :

$$\vec{E}_z = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{3}} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\frac{a^2}{3} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Dans le cas d'un carré on a $n = 4$, d'où le champ électrostatique :

$$\vec{E}_z = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{4}} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\frac{a^2}{2} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$



**Exercice1.5**

1/ Représentation et calcul du champ électrique résultant au point $D$ :

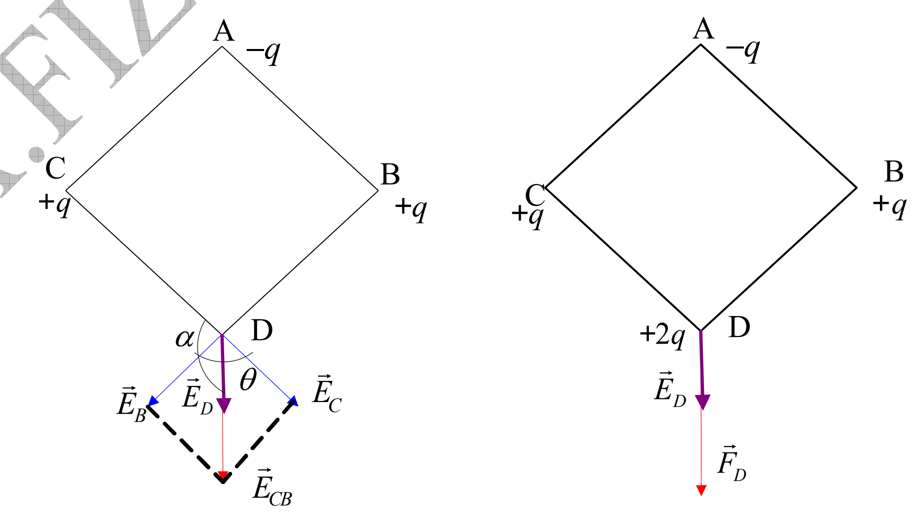



**Figure pour la question 1** **Figure pour la question 3**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \\ \vec{E}_{CB} = \vec{E}_C + \vec{E}_B\end{array}\right| \Rightarrow \vec{E}_D = \vec{E}_{CB} + \vec{E}_A$$

$$E_C = E_B = k\frac{q}{a^2} \quad ; \quad (AD=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}\,) \Rightarrow \quad E_A = k\frac{q}{2a^2}$$

$$E_{CB} = \sqrt{E_C^{\ 2} + E_B^{\ 2} + 2E_B E_C \cos \pi/2} \Rightarrow E_{CB} = E_C\sqrt{2} \Rightarrow E_{CB} = \sqrt{2}\frac{kq}{a^2}$$

$$\alpha=\pi \quad \Rightarrow \quad E_D = \sqrt{E_{CB}^{\ 2} + E_A^{\ 2} - 2E_A E_{CB}.\cos\pi} \Leftrightarrow E_D = E_{CB} - E_A$$

$$E_D = \frac{kq}{a^2}.\sqrt{2} - \frac{kq}{2a^2} \Rightarrow E_D = \frac{kq}{a^2}.\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{E_D = 0,914.\frac{kq}{a^2}}(V.m^{-1})$$

2/ Calcul du potentiel résultant au point $D$ :

$$V_D = V_A + V_C + V_B \quad ; \quad V_D = -\frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} \Rightarrow V_D = \frac{kq}{a}(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \boxed{V_D = 1,29\frac{kq}{a}}$$

3/ Calcul de la force appliquée à la charge $(+2q)$ au point $D$ :

$$\vec{F}_D = 2q.\vec{E}_D \Rightarrow F_D = 2q.E_D$$

$$F_D = 2q.\left[\frac{kq}{a^2}(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right] \Rightarrow F_D = \frac{kq^2}{a^2}(2\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \boxed{F_D \simeq 1,83.\frac{kq^2}{a^2}}(N)$$

4/ Calcul de l'énergie potentielle de la charge $+2q$ :

$$E_p = Q.V \ , \ E_p = 2q.V \ , \ E_p = 2q.\frac{kq}{a}(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E_p = 2.\frac{kq^2}{a}(4-\sqrt{2}) \\ E_p \simeq \ 2,59\frac{kq^2}{a}\end{array}}(J)$$

**<u>Exercice1.6</u>**

1/ Pour calculer le potentiel électrique, on utilise l'expression scalaire : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$

Une fois que les deux points sont placés sur la figure ci-dessous, on calcule les distances $d$ et $d'$ séparant le point $M$ des deux charges :

$$d' = \sqrt{(x-4a)^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad d = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$$

Le potentiel produit au point $M(x,y,z)$ est donc :

$$V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d'}\right)$$

$$\boxed{V_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2 + y^2 + z^2}}\right)}$$

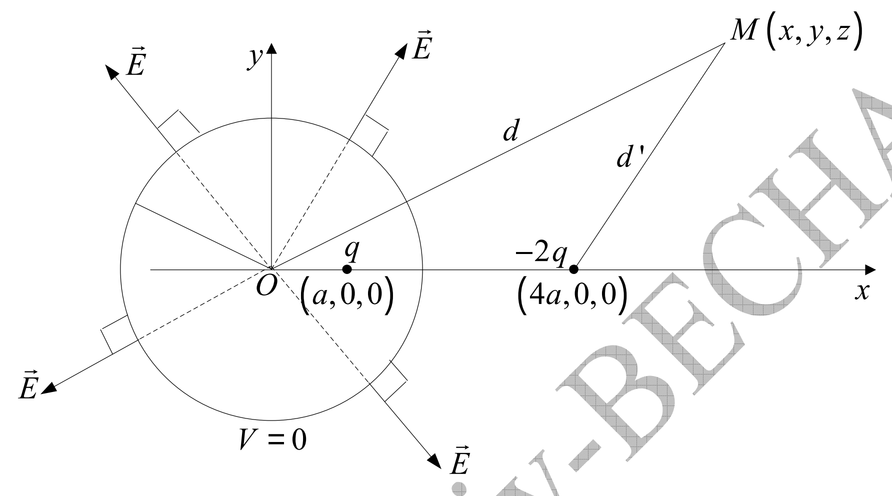
2/ Surface équipotentielle :

$$V(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{2}{d'}\right)=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2+y^2+z^2}}=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=4a^2}$$

On voit que la surface équipotentielle $V=0$ est le centre d'une sphère de rayon $r=2a$.

3/ Le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface équipotentielle. Quelque soit le point par lequel passe le champ, ce dernier est perpendiculaire à la surface de la sphère et passe par conséquent par le centre de cette sphère.




**Exercice1.7**

1/ Soit le champ élémentaire $d\vec{E}$ crée au point $M$, par une longueur élémentaire $dy$ du segment rectiligne. $M$ est situé à la distance de $dy$.

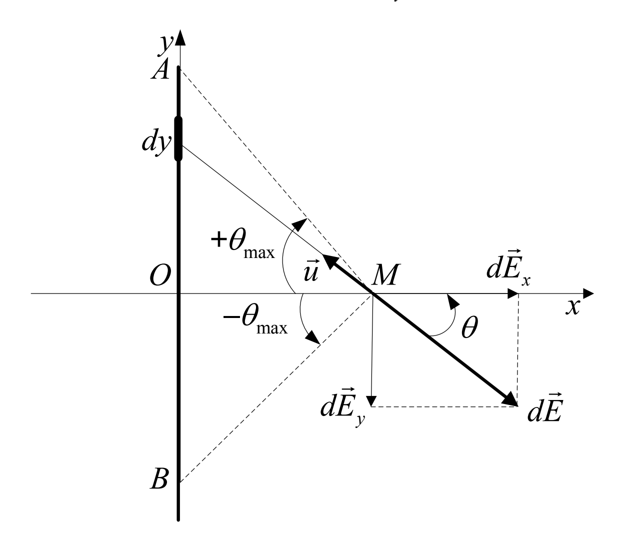
$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(M)=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\vec{u} \\ dq=\lambda dy \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E}(M)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\vec{u}$$

Le champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ a deux composantes :

$$d\vec{E}(M)=d\vec{E}_x+d\vec{E}_y$$

$$d\vec{E}(M)=dE_x.\vec{u}_x+dE_y.\vec{u}_y$$

$$dE_x=dE.\cos\theta \quad , \quad dE_y=dE.\sin\theta$$



Démontrons que $E_y = 0$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_y = dE.\sin\theta \\ dE_y = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\sin\theta \\ r^2 = \dfrac{x^2}{\cos^2\theta} \\ y = xtg\theta \Rightarrow dy = \dfrac{x}{\cos^2\theta}d\theta \end{array}\right| \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \sin\theta d\theta$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\cos\theta\right]_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\underbrace{\left[\cos(+\theta_{max}) - \underbrace{\cos(-\theta_{max})}_{\cos\theta_{max}}\right]}_{0}$$

$$\boxed{E_y = 0}$$

2/ Puisque c'est ainsi, le champ résultant est égal à sa composante horizontale (voir figure ci-dessus). Exprimons $r^2$ et $dy$ en fonction de $x$ et $\cos\theta$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_x = dE.\cos\theta \\ dE_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta \\ r^2 = \dfrac{x^2}{\cos^2\theta} \\ y = xtg\theta \Rightarrow dy = \dfrac{x}{\cos^2\theta}d\theta \end{array}\right| \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \cos\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin(+\theta_{max}) - \underbrace{\sin(-\theta_{max})}_{-\sin\theta_{max}}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x}.2\sin(+\theta_{max}) \\ \sin(+\theta_{max}) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_x}$$

3/ Dans le cas d'un fil infiniment long, on a $a \to \infty$, ce qui nous conduit à $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \to 1$.

d'où :

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\vec{u}_x}$$

**Exercice1.8**

1/ Commençons par chercher la résultante des deux champs élémentaires créés au point $P$ par une longueur élémentaire de la portion $x$ et par une longueur élémentaire de la portion $L - x$. Voir figure ci-dessous.

Pour la partie $x$ : $d\vec{E}_1 = d\vec{E}_{1x} + d\vec{E}_{1y}$

Pour la partie $L-x$ : $d\vec{E}_2 = d\vec{E}_{2x} + d\vec{E}_{2y}$

Les deux composantes du champ élémentaire $d\vec{E}$ résultant de la composition de $d\vec{E}_1$ et de $d\vec{E}_2$ sont :

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}_{1x} - d\vec{E}_{2x} \Rightarrow dE_x = dE_{1x} - dE_{2x}$$
$$d\vec{E}_y = d\vec{E}_{1y} + d\vec{E}_{2y} \Rightarrow dE_y = dE_{1y} + dE_{2y}$$

Pour calculer $E_x$ on doit calculer d'abord $E_{1x}$ et $E_{2x}$ :

Calcul de $E_{1x}$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_{1x} = dE_1 \sin\alpha \\ dE_{1x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r_1^2}\sin\alpha \\ dq = \lambda dx \end{array}\right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_1^2}\sin\alpha$$

Exprimons $dx$ et $_1$ en fonction de l'angle $\alpha$ pour trouver :

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\alpha \Rightarrow dx = R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ r_1 = \dfrac{R}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\dfrac{R}{\cos\alpha}\right)^2}\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha.d\alpha$$

En intégrant on obtient $E_{1x}$ :

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{-\theta_1}\sin\alpha.d\alpha \Rightarrow E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[-\cos\alpha\right]_0^{-\theta_1}$$

$$\boxed{E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_1 + 1\right)}$$

De la même façon, on calcule $E_{2x}$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_{2x} = -dE_2 \sin\beta \\ dE_{2x} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r_2^2}\sin\beta \\ dq = \lambda dx \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_2^2}\sin\beta$$

Exprimons $dx$ et $_2$ en fonction de l'angle $\beta$ pour trouver :

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\beta \Rightarrow dx = R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta} \\ r_2 = \dfrac{R}{\cos\beta} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta}}{\left(\dfrac{R}{\cos\beta}\right)^2}\sin\beta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\beta.d\beta$$

En intégrant on obtient $E_{2x}$ :

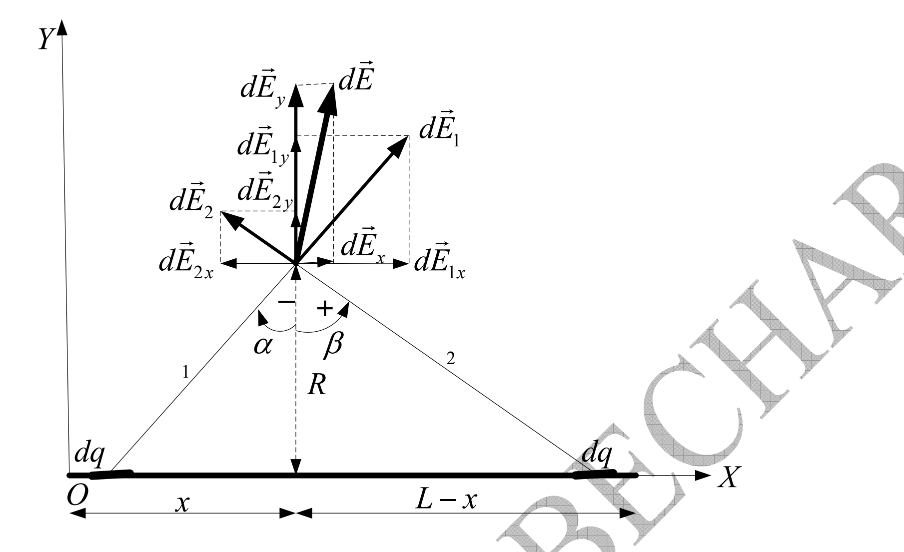
$$E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\theta_2}\sin\beta d\beta \Rightarrow E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[-\cos\beta\right]_0^{+\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_2 + 1\right)}$$

La composante parallèle au fil est donc :

$$E_x = E_{1x} - E_{2x} \Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_1 + 1\right) - \left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_2 + 1\right)\right]$$

$$\boxed{E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)}$$




Pour calculer $E_y$, on doit calculer $E_{1y}$ et $E_{2y}$ :

Calcul de $E_{1y}$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_{1y} = dE_1\cos\alpha \\ dE_{1y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r_1^2}\cos\alpha \\ dq = \lambda dx \end{array}\right| \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_1^2}\cos\alpha$$

Exprimons $dx$ et $_1$ en fonction de l'angle $\alpha$ :

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\alpha \Rightarrow dx = R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ r_1 = \dfrac{R}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\dfrac{R}{\cos\alpha}\right)^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\alpha.d\alpha$$

Intégrons pour obtenir $E_{1y}$ :

$$E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{-\theta_1}\cos\alpha.d\alpha \Rightarrow E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\alpha\right]_0^{-\theta_1}$$

$$\boxed{E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\sin\theta_1\right)}$$

Idem pour $E_{2y}$ :

$$\left.\begin{array}{l} dE_{2y} = dE_2\cos\beta \\ dE_{2y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r_2^2}\cos\beta \\ dq = \lambda dx \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_2^2}\cos\beta$$

Exprimons $dx$ et $_2$ en fonction de l'angle $\beta$, pour arriver à :

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\beta \Rightarrow dx = R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta} \\ r_2 = \dfrac{R}{\cos\beta} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta}}{\left(\dfrac{R}{\cos\beta}\right)^2}\cos\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\beta.d\beta$$

En intégrant on obtient $E_{2y}$ :

$$E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\theta_2}\cos\beta d\beta \Rightarrow E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\beta\right]_0^{+\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2\right)}$$

La composante perpendiculaire au fil est :

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} \Rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\sin\theta_1\right) + \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2\right)\right]$$

$$\boxed{E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)}$$

Finalement le champ résultant de tout le fil chargé au point $P$ est :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\vec{u}_x + \left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\vec{u}_y\right]}$$

2/ Lorsque le point $P$ est à égale distance des extrémités du fil on a $\theta_1 = -\theta_2$. On pose $\theta_2 = \theta$, le champ résultant est donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\underbrace{\left(\cos\theta - \cos(-\theta)\right)}_{0}\vec{u}_x + \underbrace{\left(\sin\theta - \sin(-\theta)\right)}_{2\sin\theta}\vec{u}_y\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\theta\vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\theta}$$

Pour un fil infiniment long, on a $\theta \to \frac{\pi}{2}$ soit $\sin\theta \to 1$, et par conséquent :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}}$$

**Exercice1.9**

Le champ électrique élémentaire $d\vec{E}$ produit au point $P$ par la charge élémentaire $dq$ du fil est :

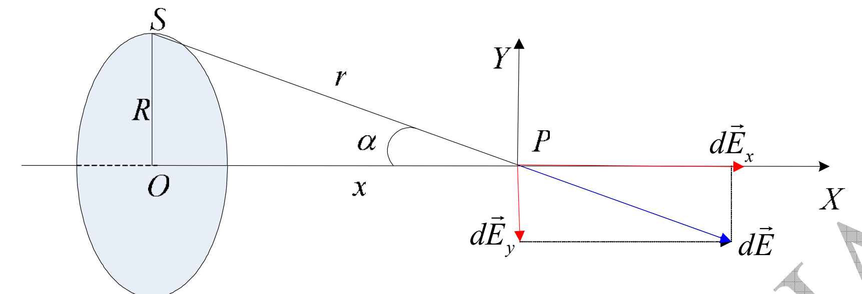
$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j}$$

A cause de la symétrie on a :

$$\vec{E}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x$$

D'où

$$dE = k\frac{dq}{r^2} \qquad dE_x = dE.\cos\alpha \qquad dq = \lambda.dl \quad \Bigg| \Rightarrow dE_x = k\frac{dq}{r^2}.cos\alpha \Rightarrow \; dE_x = k\frac{\lambda dl}{r^2}.cos\alpha$$




Dans le triangle rectangle $POS$ , on a :

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dl \quad ;$$

Et donc :

$$E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.2\pi R$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{i}} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}}(V.m^{-1})$$

2/ Calcul du potentiel électrique :

$$dV = k\frac{dq}{r} \;,\; dV = k\frac{\lambda dl}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \Rightarrow V = k\frac{\lambda}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+R^2\right)}}}(V)$$

3/ Détermination du point où le champ électrique est maximal : Pour que le champ soit maximal, il faut que sa dérivée par rapport à $x$ soit nulle : $\left.\frac{dE_x}{dx}\right|_M = 0$. Commençons donc par calculer cette dérivée :

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}(2x)\left(x^2+R^2\right)^{1/2} - x}{(x^2+R^2)^3}\right] = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}\times\left(x^2+R^2-3x^2\right)}{(x^2+R^2)^3}\right]$$

L'expression finale de cette dérivée est :

$$\boxed{\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}\right]}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow R^2 - 2x_{\max} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{\max} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

**Exercice1.10**

Le champ électrostatique élémentaire produit par la charge élémentaire concentrée autour du point $P$ est égal à :

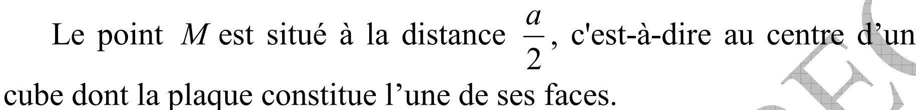
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}_P$$

En raison de la symétrie, le champ résultant est porté par l'axe $OZ$ :

$$dE_z = dE.\cos\theta \Rightarrow E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma dS}{r^2}.\cos\theta$$

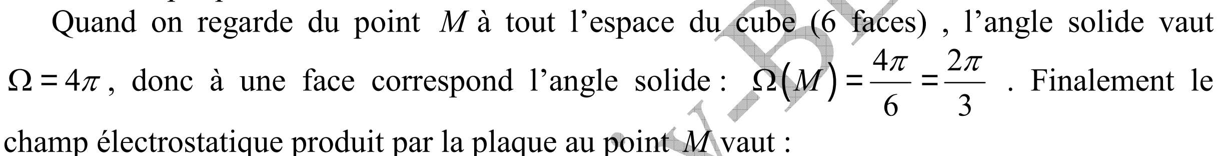
On reconnaît dans cette expression l'angle solide élémentaire $d\Omega = \frac{dS.\cos\theta}{r^2}$, sous lequel , et à partir du point $M$ ,on voit la surface élémentaire $dS$ autour du point $P$ :

$$\boxed{E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Omega(M)}$$



Le point $M$ est situé à la distance $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire au centre d'un cube dont la plaque constitue l'une de ses faces.

Quand on regarde du point $M$ à tout l'espace du cube (6 faces) , l'angle solide vaut



$\Omega = 4\pi$ , donc à une face correspond l'angle solide : $\Omega(M) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ . Finalement le champ électrostatique produit par la plaque au point $M$ vaut :

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{E(M) = \frac{1}{6\varepsilon_0}}$$

**Exercice1.11**

1/ Considérons sur le disque une surface élémentaire située à une distance du centre $O$. Cet élément de surface s'écrit dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ des coordonnées cylindriques : $d^2S = dr.rd\theta$ et porte la charge $d^2q = \sigma d^2S$ en produisant un champ $\overrightarrow{d^2E}$ tel que $\overrightarrow{d^2E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2q}{l^2}$.

Toutes les surfaces élémentaires situées à la distance de $O$ produisent des champs électriques élémentaires qui font le même angle avec l'axe $OZ$. Nous pouvons dès lors intégrer le résultat précédent en faisant varier $\theta$ entre $0$ et $2\pi$ :

$$dE_z = \int_0^{2\pi} d^2E.\cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\alpha.dr}{l^2}d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\cos\alpha.dr}{l^2}$$

Il nous reste à intégrer entre $R_1$ et $R_2$ en faisant attention à ce que $l^2 = r^2 + z^2$ et $\cos\alpha = \frac{z}{l}$ :

$$E = \int_{R_1}^{R_2} dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

On pose $u = (r^2 + z^2)$. D'où $du = 2rdr$ , avec $u_1 = (R_1^2 + z^2)$ et $u_2 = (R_2^2 + z^2)$.

On obtient :

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{2u^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-2\sqrt{u}\right]_{u_1}^{u_2}$$

Finalement on arrive à :

$$\boxed{E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)}$$

2/ Le potentiel produit par la surface élémentaire $d^2S$ est $d^2V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2q}{l}$. Après intégration de l'angle $\theta$, on obtient $dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$. Comme précédemment, on pose $u = \left(r^2+z^2\right)$, on obtient donc $dV = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{du}{\sqrt{u}}$.

Tout cela nous amène à :

$$V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{u}\right]_{u_1}^{u_2}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}\right] \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2}-\sqrt{R_1^2+z^2}\right]}$$

On sait que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Le gradient en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z :$$

En appliquant cette expression au résultat précédent du champ, on se rend compte que le champ électrostatique n'a qu'une seule composante suivant l'axe $OZ$, car les dérivées partielles par rapport à  et $\theta$ sont toutes les deux nulles.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)}$$

3/ Quant $R_1 = 0$, on trouve le champ électrostatique produit sur l'axe du disque uniformément chargé :

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R_2^2}{z^2}}}\right)}$$

4/ Pour un plan infini $R_2 \to \infty$ . On aura :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R_2^2}{z^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2^2}{z^2}}} = \frac{z}{R} \to 0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Le champ devient indépendant de $z$, c'est-à-dire de la distance au plan. En tout point extérieur au plan chargé, le champ vaut $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

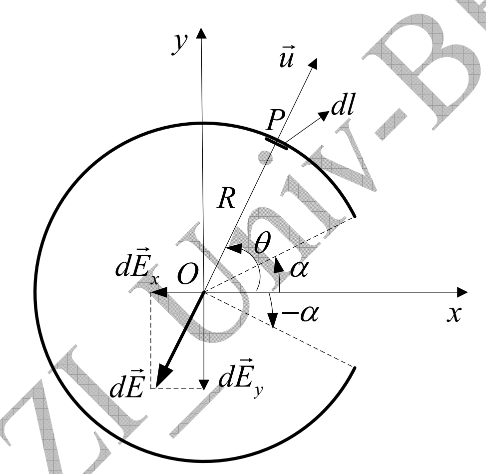
**Exercice1.12**

Soit le champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par la longueur élémentaire $dl$ ,de la circonférence chargée de l'anneau, concentrée autour du point $P$ :(Le signe moins résulte des sens opposés du champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ et du vecteur unitaire $\vec{u}$ tels que indiqués sur la figure ci-dessous).

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(O) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{R^2}\vec{u}_r \\ dq = \lambda dl \\ dl = Rd\theta \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E}(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R}\vec{u}$$

Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ a deux composantes $d\vec{E}(O) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$, cependant, et pour raison de symétrie de la répartition des charges, la composante $d\vec{E}_x$ est la seule qui participe au champ total au point $O$. D'où :

$$dE_x = dE.\cos\theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\theta.d\theta$$




Pour obtenir le champ total produit par toute la charge au point $O$, on intègre de $\theta = \alpha$ à $\theta = 2\pi - \alpha$ :

$$dE_x = dE.\cos\theta \Rightarrow E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_{\alpha}^{2\pi-\alpha}$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin(2\pi-\alpha)-\sin\alpha\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha.\vec{u}_y}$$

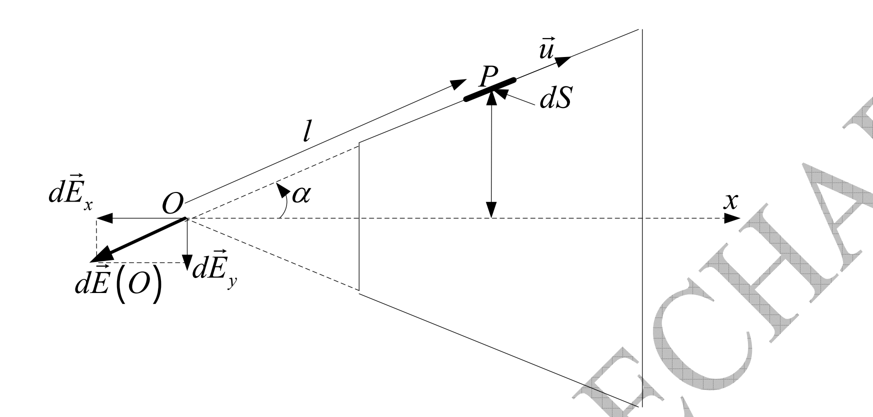
**Exercice1.13**

Les plans passant par l'axe $Ox$ sont des plans de symétrie de la répartition des charges. Le champ électrostatique doit appartenir successivement à l'ensemble des plans, donc à leur intersection : le champ résultant $\vec{E}(O)$ a pour direction l'axe $Ox$ .

Considérons une surface élémentaire $dS$ située sur le corps du cône et concentrée autour du point $P$ . C'est ce qui est indiqué sur la figure ci-dessous.

La surface élémentaire produit au point $O$ un champ élémentaire :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(O) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{l^2}\vec{u} \\ dq = \sigma dS \\ dS = rd\theta dl \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E}(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rd\theta dl}{l^2}\vec{u}$$




Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ a deux composantes : $d\vec{E}(O) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$ .

Cependant, et pour raison de symétrie de la répartition des charges, la composante $d\vec{E}_x$ est la seule qui participe au champ total au point $O$. D'où :

$$dE_x = dE(O).\cos\theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rd\theta dl}{l^2}\cos\alpha \to (1)$$

On exprime $\sin\alpha$ en fonction de $l$ et , puis on déduit $dl$ :

$$\sin\alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{l^2} = \dfrac{\sin^2\alpha}{r^2} \\ dl = \dfrac{1}{\sin\alpha}dr \end{cases}$$

On remplace dans l'équation $(1)$ :

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma rd\theta\frac{1}{\sin\alpha}dr\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\cos\alpha$$

$$dE_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha.\frac{dr}{r^2}d\theta$$

Pour obtenir le champ total produit par toute la charge au point $O$, on doit calculer une intégrale double :

$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$E(O) = E_x = \frac{\sigma_0 a}{2\varepsilon_0}\underbrace{\cos\alpha\sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

$$E(O)=\frac{\sigma_0 a}{4\varepsilon_0}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\Leftrightarrow \vec{E}(O)=\frac{\sigma_0 a}{4\varepsilon_0}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\vec{u}_x$$

**Exercice1.14**

Tous les ions sont situés sur la même droite. Soit $M$ un point de symétrie. (Voir figure)

$M$ 1 2 $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ 3 4 $n$

$+q$ $-q$ $+q$ $-q$ $+q$ $-q$ $+q$ $-q$ $+q$

Etudions d'abord la moitié droite de la droite : l'énergie potentielle de la charge située au point $M$ vaut :

$$E_{P_M}=q_M.V_M$$

Le potentiel électrique $V_M$ produit au point $M$ par les ions de la moitié droite est :

$$V_M=\sum V_i=\sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{a}\prec 0$$

$$V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2a}\succ 0$$

$$V_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{3a}\prec 0$$

.......................

$$|q_1|=|q_2|=|q_3|=.....=|q|$$

$$\Rightarrow V_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}..........+\frac{1}{n}\right)$$

Donc l'énergie potentielle de la charge située au point $M$ (en considérant les deux moitiés ensembles) est :

$$E_{P_M}=2q_M.V_M \quad |q_M|=q \quad \Rightarrow E_{P_M}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}..........+\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui équivaut à :

$$E_{P_M}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}..........+\frac{1}{n}\right)$$

Sachant que : $\ln(1+x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.........\frac{x^n}{n}\right)$,

Donc : $\ln(1+1)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.........\frac{1}{n}\right)$

D'où :

$$E_{P_M}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\ln 2\Rightarrow \boxed{E_{P_M}=-3,2.10^{-26}J}$$

**Exercice1.15**

**Le champ électrostatique au point** $O$ : (voir figure ci-dessous)

La couronne sphérique élémentaire a pour épaisseur $Rd\theta$, pour circonférence $2\pi R\sin\theta$ et porte la charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi R^2\sigma_0 \sin\theta\cos\theta d\theta$. A cause de la symétrie, le champ $\vec{E}_x$ participe seul dans le champ $\vec{E}$.

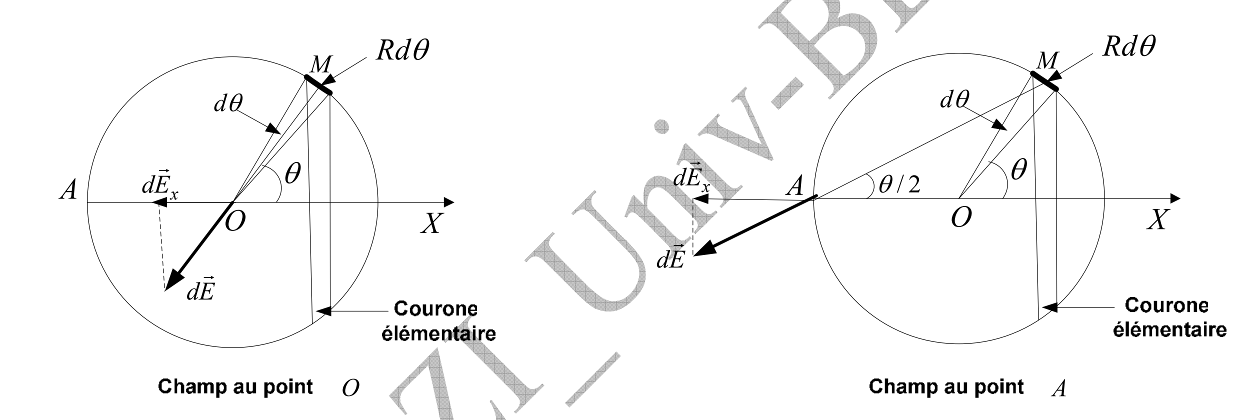
D'après la figure on a :

$$dE_x(O) = -dE(O)\cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

$$dE_x(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma_0\sin\theta\cos\theta^2 d\theta}{R^2}$$

$$E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_0^\pi \underbrace{\sin\theta\cos^2\theta.d\theta}_{\cos^2\theta.d(\cos\theta)} \Rightarrow E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi$$

$$\boxed{E(O) = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(O) = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$






**Le champ électrostatique au point** $A$ : (voir figure ci-dessus)

La même couronne élémentaire d'épaisseur $Rd\theta$ et de circonférence $2\pi R\sin\theta$ porte la charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi R^2\sigma_0\sin\theta\cos\theta d\theta$. La différence entre ce cas et le cas précédent est la distance entre le point $M$ et le point $A$. D'après la figure :

$$\left.\begin{array}{l}(OM)^2 = (OA)^2 + (AM)^2 + 2(OA)(AM)\cos\dfrac{\theta}{2} \\ R^2 = R^2 + r^2 + 2rR\cos\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right| \Rightarrow (OA) = r = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

Pour raison de symétrie, le champ $\vec{E}_x$ participe seul dans le champ $\vec{E}$.

$$dE_x(A) = -dE(A)\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$dE_x(A) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma_0\sin\theta\cos\theta d\theta}{\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}.d\theta$$

On procède à la transformation trigonométrique : $\sin\theta = \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, puis on remplace pour obtenir :

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos\theta.d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta.d\theta$$

On procède à une autre transformation trigonométrique : $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta = \sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$, puis par remplacement on obtient :

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right).d\theta$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\left[+\frac{2}{3} - 2\right]$$

$$\boxed{E_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(A) = \vec{E}_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

**Exercice1.16**

1/ Le potentiel élémentaire $dV$ produit au centre $O$ par une charge ponctuelle $dq$ est : $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R}$ (chaque $dq$ , et quelque soit sa position sur la surface de la demie- sphère est située à la distance $R$ du centre $O$ ).

La surface de la demie sphère étant $S = \frac{4\pi R^2}{2}$, elle porte la charge totale: $q = \sigma S \Rightarrow q = 2\sigma\pi R^2$. Donc le potentiel au point $O$ produit par chaque charge est :

$$\left.\begin{array}{l} V(O) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} \\ V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \\ q = 2\sigma\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V(O) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

Pour calculer le champ au centre de la demie sphère, on divise la demie sphère en couronnes élémentaires. Chaque couronne a une circonférence $2\pi$ , où $r = R\sin\theta$, d'épaisseur $Rd\theta$ et sa surface $dS = 2\pi R^2 d\theta$. Chaque couronne élémentaire porte donc une charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$ . (Voir figure ci-dessous)

Le champ élémentaire $dE$ produit au centre $O$ par la charge élémentaire portée par la couronne est : $d\vec{E} = dE_z + d\vec{E}_x$ .

Pour raison de symétrie, le champ produit est porté par l'axe $Oz$ , et par conséquent :

$$\left.\begin{aligned} d\vec{E}_x &= dE.\sin\theta.\vec{u}_x = \vec{0} \\ d\vec{E}_z &= dE.\cos\theta.\vec{u}_z \end{aligned}\right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_z$$

De tout cela on en déduit :

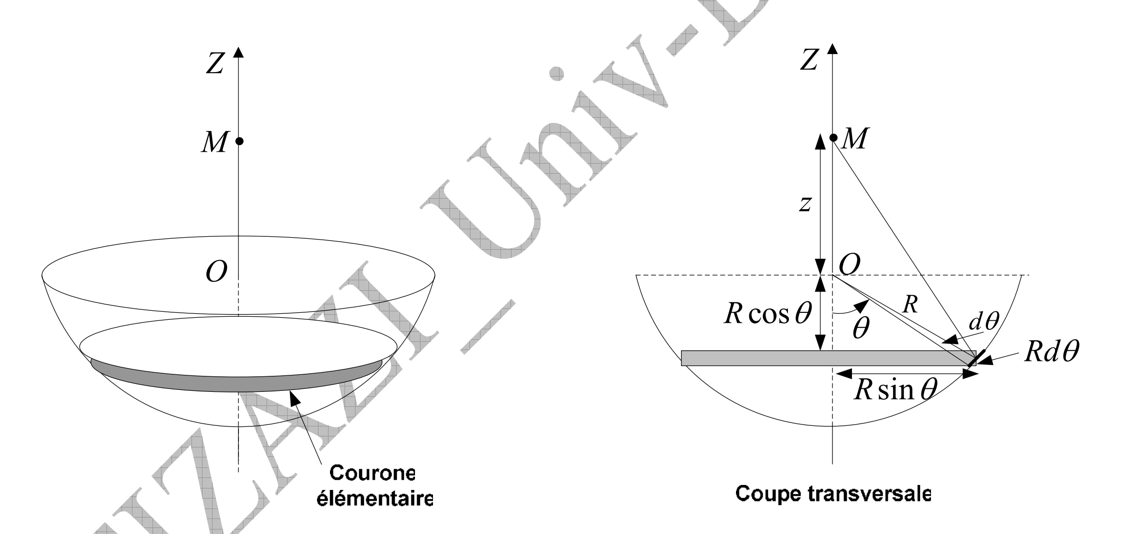
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R^2}\cos\theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dE_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

On procède à une transformation trigonométrique : $s\text{in}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ , puis on remplace et on intègre pour obtenir finalement le champ électrostatique $E(O)$ produit par toute la charge surfacique au centre de la demie sphère :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]$$

$$\boxed{E_z = E(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_z = \vec{E}(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{u}_z}$$




On n'a calculé que le potentiel $V(O)$ en un point déterminé et non la fonction $V(z)$ du potentiel sur tout le long de l'axe $Oz$. C'est pour cette raison qu'on ne peut pas utiliser la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ pour calculer le champ.

2/ En suivant les mêmes étapes que pour la question précédente, avec la seule différence que dans ce cas toutes les charges élémentaires $dq$ ne sont pas situées à la même distance du point $M$ , situé lui même sur l'axe $Oz$ .

$$\left.\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r} \\ dS &= dS = 2\pi R^2 d\theta \\ r^2 &= (z + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow dV = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta.d\theta}{\left(z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta\right)^{1/2}}$$

Pour intégrer cette expression on pose $u = z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta$ , dont la différentielle est $du = -2Rz\sin\theta.d\theta$ , et nous savons que $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$ . D'où :

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(-2zR)} \int_{u(\theta=0)}^{u(\theta=\pi/2)} \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$V(M) = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{u}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[z + R - \sqrt{z^2 + R^2}\right]}$$

Pour obtenir le champ électrique il suffit de dériver la fonction du potentiel par rapport à $z$ :

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV(z)}{dz}\vec{u}_z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z^2}\right)$$

$$\boxed{E(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R - \sqrt{z^2 + R^2}}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)}$$

Quand $z = 0$ , $V(0)$ et $E(0)$ prennent des formes indéterminées. C'est pour cela qu'on doit chercher leurs limites quand $z \to 0$.

Ecrivons le potentiel sous la forme :

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{R}{z} - \frac{(z^2 + R^2)^{1/2}}{z}\right] = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{1/2}\right]$$

Calculons la limite du potentiel quand $z \to 0$ :

$$V(0) = \lim_{z\to 0} V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{V(0) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

Pour le champ on suit le même raisonnement :

$$E(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{z^2} - R\frac{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{1/2}}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{\underbrace{z^2}_{\to 0} + R^2}}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{R}{z^2}\left(\frac{z^2}{2R^2}\right) + \frac{1}{R}\right)$$

$$\boxed{E(0) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$$

Ainsi, nous avons retrouvé les valeurs du potentiel et du champ qui sont parfaitement équivalentes aux résultats de la question 1/.

**Exercice1.17**

Soit un axe de symétrie $Oz$ (perpendiculaire au plan infini), et un point $M$ de l'axe $Oz$ infiniment proche du plan.

Le champ résultant est porté par l'axe $Oz$ et ce pour la raison de symétrie.

1/ a/ On divise le plan en une série de couronnes, de rayon et d'épaisseur $d$ , comme indiqué sur la figure-a :

Chaque couronne située à la distance $R$ du point $M$ porte la charge élémentaire $dq = 2\pi r dr.\sigma$ .

Le potentiel électrique élémentaire produit par la couronne est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma.2\pi r dr}{R}$$

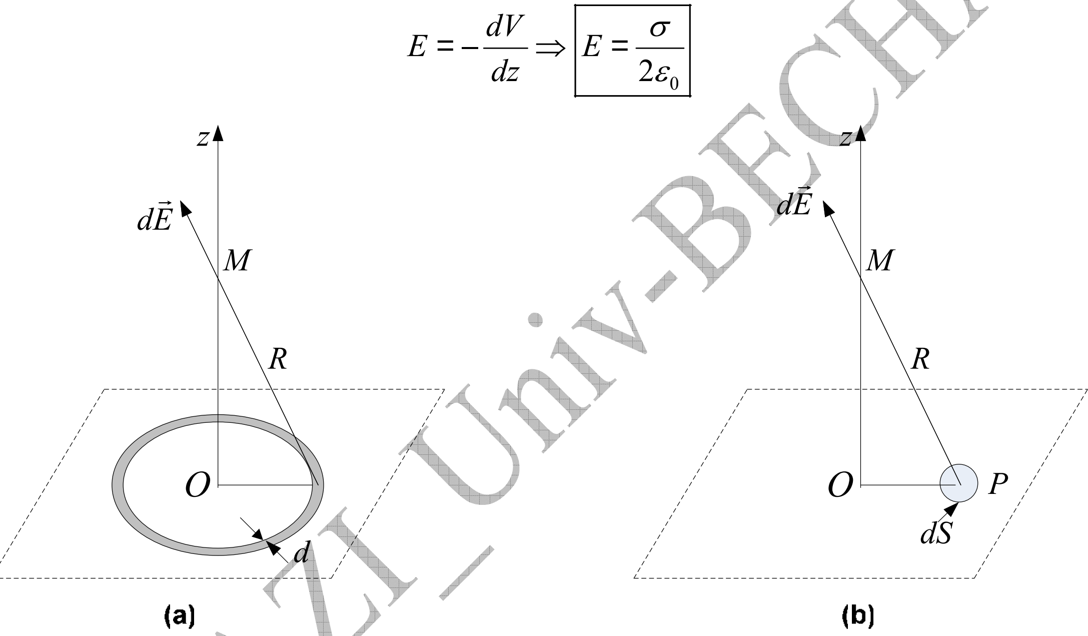
En prenant $V = 0$ quand $r \to \infty$ , le potentiel total produit par tout le plan est :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^{\infty}$$

$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z}$$

Il suffit maintenant de dériver l'expression trouvée du potentiel pour obtenir le champ électrique :

$$E = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$




b/ Pour diversifier, on calcule cette fois le champ électrique puis on en déduit le potentiel électrique .

Soit $d\vec{E}$ le champ élémentaire produit par la charge $dq = \sigma dS$ que porte une surface élémentaire $dS$ entourant le point $P$ du plan (figure-b) :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(PM)^2}\vec{u}_P$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(M) = \int dE.\cos\theta.\vec{u}_z \\ dq = \sigma.dS \\ PM = r\end{array}\right| \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dS.\cos\theta}{r^2}\vec{u}_z$$

On reconnaît l'angle solide élémentaire $d\Omega = \dfrac{dS\cos\theta}{r^2}$ sous lequel on voit, du point $M$ , la surface élémentaire $dS$ autour du point $P$ . Puisque le plan est infini, on le voit sous un angle solide $\Omega_M = 2\pi$ . d'où :

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z} \Leftrightarrow \boxed{E(M)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

On obtient l'expression du potentiel à partir de l'expression du champ électrique en intégrant :

$$dV=-Edz \Rightarrow V=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz \Rightarrow \boxed{V=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z}$$

2/ **<u>En utilisant le théorème de Gauss</u> :** sur la figure-c, on choisit un cylindre comme surface de Gauss.

Le flux à travers la surface latérale est nul car $\vec{E}\perp\overrightarrow{dS}$, mais le flux à travers chacune des surfaces des bases $S_1$ et $S_2$ est égal à : $\Phi_{S1}=\Phi_{S2}=ES$. La charge enfermée dans le cylindre est $Q_{\text{int}}=\sigma S$. D'après le théorème de Gauss le champ électrique produit par le plan infini est donc :

$$\Phi=2ES=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

D'après les résultats obtenus, on remarque que le champ électrique produit par un plan infini est constant dans tout l'espace entourant ce plan ; cependant le potentiel électrique est proportionnel à la distance entre le plan et le point situé sur l'axe de ce même plan.

3/ Au cours de sa chute la charge est soumise à deux forces verticales : son poids $\vec{P}$ et la force électrostatique $\vec{F}_e$. On applique la relation fondamentale de la dynamique pour calculer l'accélération de la charge :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{P}+\vec{F}_e=m\vec{a}\\ &F_e=qE=q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\\ &P=mg \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a=g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

L'accélération est constante et la trajectoire est rectiligne, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié.

La vitesse de la charge à son arrivée sur le plan est :

$$v=\sqrt{2az} \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{2\left(g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)}}$$

La durée de la chute est :

$$z=\frac{1}{2}at^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2z}{a}} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{2z}{g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}}}$$

**<u>Exercice1.18</u>**

On peut modéliser la cavité sphérique de rayon   creusée dans la sphère de rayon $R$ comme étant la superposition d'une sphère chargée de rayon  , de centre $O_2$ et de densité $-\rho$, et d'une sphère de rayon $R$ de centre $O_1$ et de densité volumique $+\rho$ . (Voir figure ci-dessous).

On applique le principe de superposition en un point de la cavité (voir figure ci-dessous) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

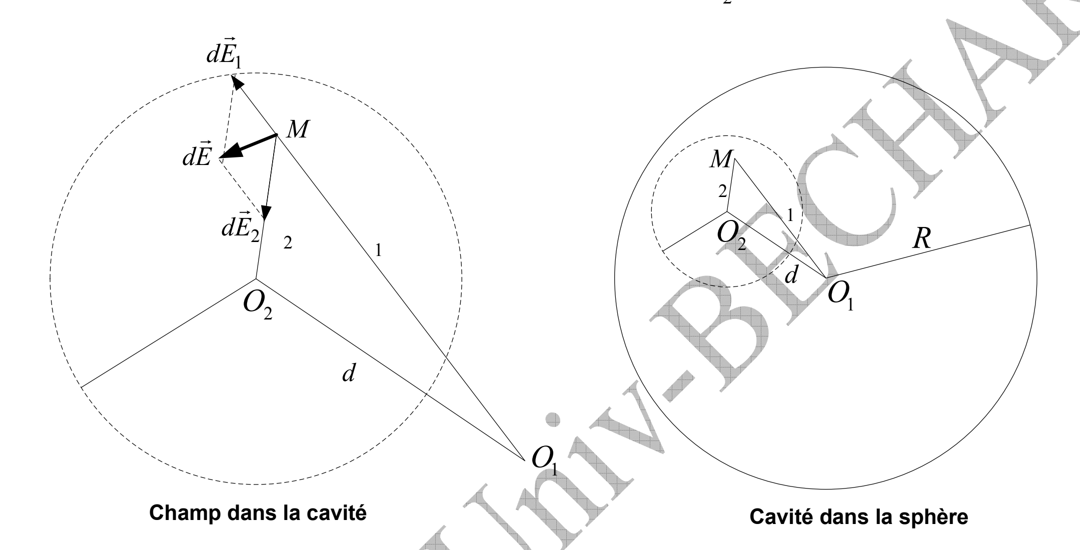
$\vec{E}_1(M)$ : champ résultant de $\rho$

$\vec{E}_2(M)$ : champ résultant de $-\rho$

La symétrie et l'invariance de chaque source confirment que le champ est radial :

$$\vec{E}_1(M) = E_1\vec{u}_1 \quad , \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1}$$

$$\vec{E}_2(M) = E_2\vec{u}_2 \quad , \quad \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2}$$




On utilise le théorème de Gauss : Pour chaque distribution de charge, on prend une sphère de rayon $_i$ , de centre $O_i$ et de surface fermée $S_i$ passant par le point $M$ .

$$\oiint \vec{E}_i.\overrightarrow{dS}_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint E_1.dS_1 = E_1.4\pi r_1^2 = \rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1$$

$$\oiint E_2.dS_2 = E_2 4\pi r_2^2 = -\rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_2^3 \Rightarrow E_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2$$

Ecrivons les deux expressions vectorielles des deux champs produits :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1\vec{u}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1\frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} \rightarrow (1)$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2\vec{u}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2\frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M} \rightarrow (2)$$

On additionnant les deux champs, on obtient le champ résultant au point $M$ appartenant à la cavité :

$$(1)+(2) \Rightarrow \vec{E}(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\underbrace{\overrightarrow{O_1M}-\overrightarrow{O_2M}}_{\overrightarrow{O_1O_2}}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}} \Leftrightarrow \boxed{E(M)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}d=C^{te}}$$

**Le champ électrostatique résultant dans la cavité est uniforme.**

**Exercice1.19**

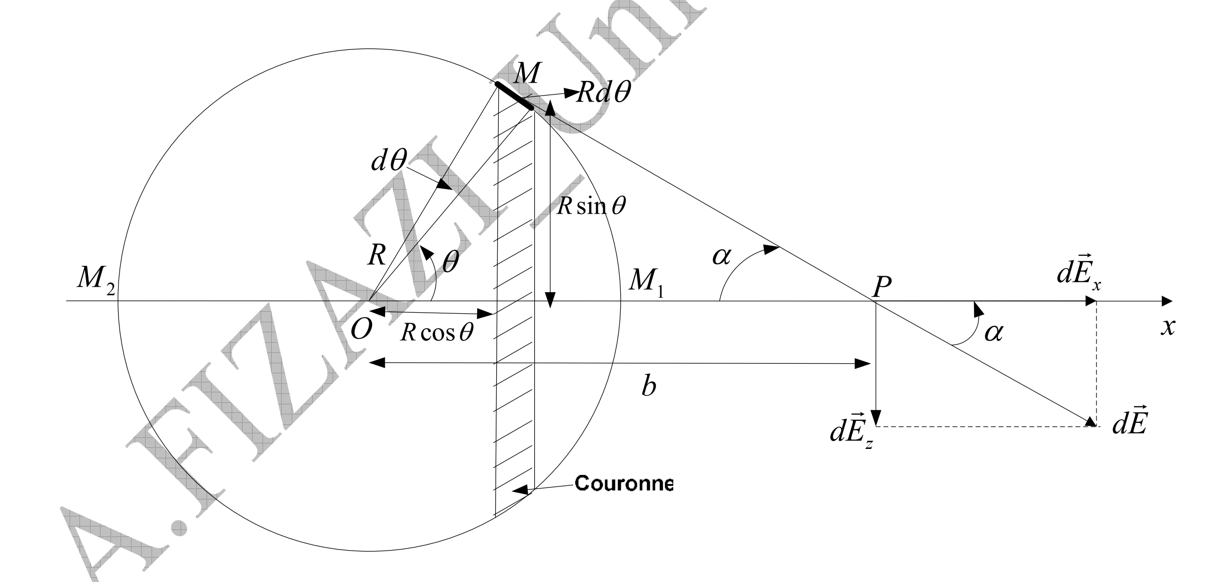
Pour calculer le champ à l'extérieur de la sphère, on divise la sphère en couronnes élémentaires. La circonférence de chaque couronne est $2\pi\rho$, où $\rho = R\sin\theta$ ($\rho$ étant le rayon de la couronne), d'épaisseur $Rd\theta$ et de surface $dS = 2\pi R^2\sin\theta d\theta$. Chaque couronne porte donc une charge élémentaire $dq=\sigma dS = 2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta$.

Le champ élémentaire $dE$ produit par la charge élémentaire que porte la couronne est $d\vec{E} = d\vec{E}_z + d\vec{E}_x$.

En raison de la symétrie, le champ produit est porté par l'axe $OX$, et par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_z = -dE.\sin\alpha.\vec{u}_z = \vec{0} \\ d\vec{E}_x = dE.\cos\alpha.\vec{u}_x \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_x \Leftrightarrow dE_x = dE\cos\alpha$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta}{r^2}\cos\alpha \rightarrow (1)$$




Pour éliminer $\theta$ et $\alpha$ de l'expression de $dE_x$, on remplace $\cos\theta$ et $\sin\theta d\theta$ :

$$R^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+r^2-R^2}{2br}$$

$$r^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2+b^2-r^2}{2Rb} \rightarrow (2)$$

En dérivant les deux membres de l'équation $(2)$, on obtient : $\sin\theta d\theta = \dfrac{rdr}{Rb}$

En remplaçant dans l'équation $(1)$, et en organisant les résultats on obtient l'expression du champ élémentaire :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{r^2}\cos\alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2}{r^2}\frac{rdr}{Rb}\left(\frac{b^2+r^2-R^2}{2br}\right)$$

$$dE_x = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{b^2}\left(\frac{b^2+r^2-R^2}{r^2}\right)dr = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R}{b^2}\left(\frac{b^2-R^2}{r^2}+1\right)dr$$

$$\boxed{dE_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\frac{b^2-R^2}{r^2}dr + \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}dr}$$

Intégrons à présent :

$$E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left[\int_{r_1}^{r_2}\frac{b^2-R^2}{r^2}dr + \int_{r_1}^{r_2}dr\right] \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left(-\frac{b^2-R^2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} + r\Big|_{r_1}^{r_2}\right)}$$

Il reste à déterminer les limites de $r_1$ et de $r_2$ : en se référant à la figure ci-dessus, on suit les positions du point $M$ appartenant à la couronne élémentaire considérée. Plusieurs cas se présentent alors:

**A l'extérieur de la sphère** : Lorsque $M$ est confondu avec $M_1$ on a : $r_1 = PM_1 = b - R$ , et lorsqu'il est confondu avec $M_2$ , on a : $r_2 = PM_2 = b + R$

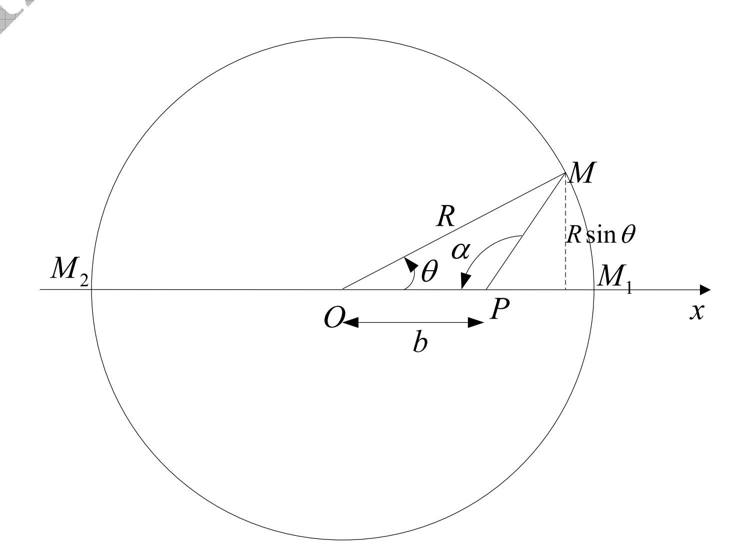
Le champ résultant est donc :

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left(-\frac{b^2-R^2}{r}\Bigg|_{b-R}^{b+R} + r\Big|_{b-R}^{b+R}\right)$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left\{\left[(b+R)-(b-R)\right]-\left[\left(\frac{b^2-R^2}{b+R}\right)-\left(\frac{b^2-R^2}{b-R}\right)\right]\right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}(2R+2R) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}\vec{u}_x}$$

**A l'intérieur de la sphère** : Voir figure suivante :



Quand $M$ est confondu avec $M_1$ on a : $r_1 = PM_1 = R-b$ , et quand il est confondu avec $M_2$ on a : $r_2 = PM_2 = b+R$

Le champ résultant est donc :

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left( -\frac{b^2-R^2}{r}\Bigg|_{R-b}^{b+R} + r\Big|_{R-b}^{b+R} \right)$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left\{ \left[ (b+R)-(R-b) \right] - \left[ \left( \frac{b^2-R^2}{b+R} \right) - \left( \frac{b^2-R^2}{R-b} \right) \right] \right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}(2b-2b) \Rightarrow \boxed{E=0}$$

**<u>A la surface de la sphère</u>** : On a trouvé qu'à l'extérieur de la sphère le champ vaut $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}$. A la surface le champ prend une valeur particulière :

$$b = R \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

2/ **On applique le théorème de Gauss** : La surface de Gauss convenable ici est une sphère de rayon $b(b \succ R)$ :

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E.S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ S = 4\pi b^2 \\ Q_{\text{int}} = \sigma.S = \sigma.4\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow E = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi b^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}}$$

**<u>Discussion</u>** :

A l'extérieur de la sphère : $b \succ R : E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}$

A l'intérieur de la sphère : $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E = 0$

A la surface de la sphère : $b = R \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

3/ Calcul du potentiel électrique : par le même raisonnement on peut écrire :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{r} \Rightarrow dV = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2}{r}\frac{rdr}{Rb}$$

A l'extérieur de la sphère :

$$dV = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{b}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}dr \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}\int_{b-R}^{b+R} dr$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b} r\Big|_{b-R}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b}}$$

A la surface de la sphère :

$$b=R \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R}$$

A l'intérieur de la sphère :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}r\Big|_{R-b}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R}$$

On remarque que le potentiel est constant à l'intérieur de la sphère, c'est ce qui explique que le potentiel est constant à l'intérieur et à la surface de la sphère ; on dit alors que la sphère constitue un **volume équipotentiel.**

4/ Déduction du champ à partir du potentiel :

**A l'extérieur de la sphère** : On considère $b$ variable $(b \succ R)$ :

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b} \\ E &= -\frac{dV}{db} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}}$$

**A la surface de la sphère** : Dans l'expression précédente on pose $b = R$ :

$$b=R \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

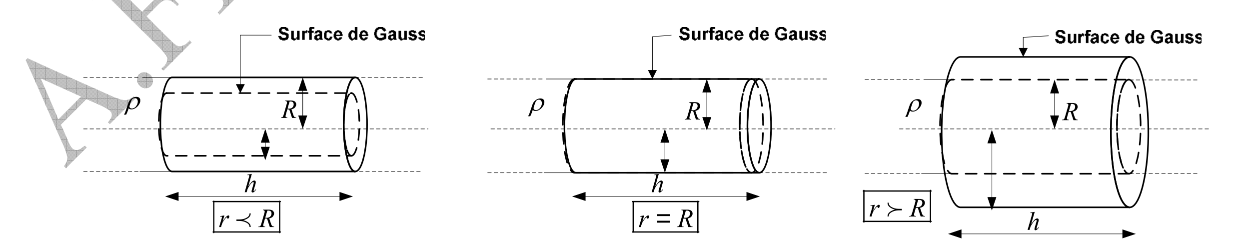
**A l'intérieur de la sphère** : $(b \prec R)$ le potentiel est constant, sa dérivée est donc nulle :

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R = Cte \\ E &= -\frac{dV}{db} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

**Exercice1.20**

**Le champ électrostatique dans le cylindre** : la surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur $h$, de rayon $r \prec R$ et qui renferme la charge $Q_{int} = \rho V = \rho\pi r^2 h$ . D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{2\pi r h.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r.\vec{u}_r}$$




**Le champ électrostatique à la surface du cylindre** : la surface de Gauss convenable ici est un cylindre de hauteur $h$ , de rayon $r = R$ et renfermant la charge $Q_{int} = \rho V = \rho\pi R^2 h = \rho\pi r^2 h$ . D'après le théorème de Gauss on a :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi R h.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_S = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_S = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R.\vec{u}_r}$$

**Remarque** : On peut obtenir l'expression du champ à la surface du cylindre en remplaçant par $R$ soit dans l'expression précédente que nous avons trouvée pour le champ à l'intérieur du cylindre, soit dans l'expression qui va suivre du champ à l'extérieur du cylindre.

**Champ électrostatique à l'extérieur du cylindre** : Nous choisissons comme surface de Gauss pour ce cas, un cylindre de hauteur $h$, de rayon $r \succ R$, renfermant une charge $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho\pi R^2 h$ . Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi rh.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\vec{u}_r}$$

2/ Pour en déduire le potentiel électrique, on fait appel à la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ . Puisque le champ est radial, on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

Pour obtenir les expressions de $E_e$ et $E_i$ , on doit intégrer :

$$V_i = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr \Rightarrow V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

On obtient les constantes d'intégration en se référant à la condition de l'annulation du potentiel en $r = 0$ et sa continuité en $r = R$ .

**Potentiel à l'intérieur du cylindre :** $(R \succ r \succ 0)$

$$\left.\begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1 \\ r = 0 \ , \ V = 0 : \ C_1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2}$$

**Potentiel à la surface du cylindre :** si on remplace par $R$ dans l'expression de $V_i$ , on obtient le potentiel à la surface du cylindre :

$$\left.\begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 \\ r = R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_S = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2}$$

**Potentiel à l'extérieur du cylindre** : $(R \prec r)$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2 \\ r = R \ , \ V = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 \end{array}\right| \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2$$

$$\boxed{V_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln\frac{R}{r} - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2}$$

**Exercice1.21**

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'une sphère de rayon  et de surface $S = 4\pi r^2$ . Si une charge $Q_{int}$ se trouve à l'intérieur de cette sphère, le champ électrique créé à l'intérieur vaut, d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

Dans les trois cas le champ est radial :

**<u>Le champ électrostatique dans la sphère interne</u>** $(r \prec R_1)$ : la charge intérieure est la charge contenue dans la surface de Gauss qui est une sphère de rayon $r \prec R_1$ (cette charge représente une partie seulement de la charge de la sphère interne). On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} E = \dfrac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{int} = \rho V = \rho \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r.\vec{u}_r}$$

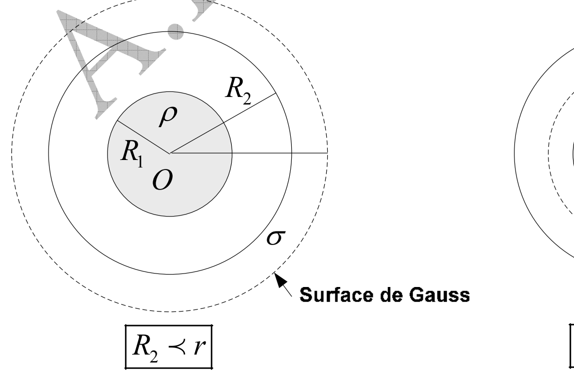
**<u>Le champ électrostatique régnant entre les deux sphères</u>** $(R_1 \prec r \prec R_2)$: la charge dans la surface de Gauss est toute la charge de la sphère interne :

$$\left. \begin{array}{l} E = \dfrac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{int} = \rho V_1 = \rho \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 \end{array} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2}.\vec{u}_r}$$

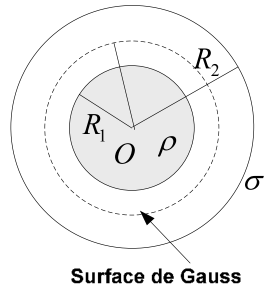
**<u>Le champ électrostatique à l'extérieur des deux sphères</u>** $(r \succ R_2)$ : la charge dans la surface de Gauss est la charge des deux sphères ensembles :

$$\left. \begin{array}{l} E = \dfrac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{int} = \rho V_1 + \sigma S_2 = \rho \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2 \end{array} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

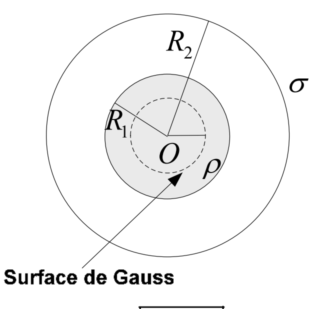
$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_2^2}{r^2} \vec{u}_r}$$




$R_2 \prec r$




$R_1 \prec r \prec R_2$




$R_1 \succ r$

Le potentiel électrostatique dans les différentes régions citées précédemment : On en déduit le potentiel à partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ . Puisque le champ est radial on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int Edr$$

Dans la région $(r \prec R_1)$ :

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \\ V = -\int Edr \end{array}\right| \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} rdr \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1}$$

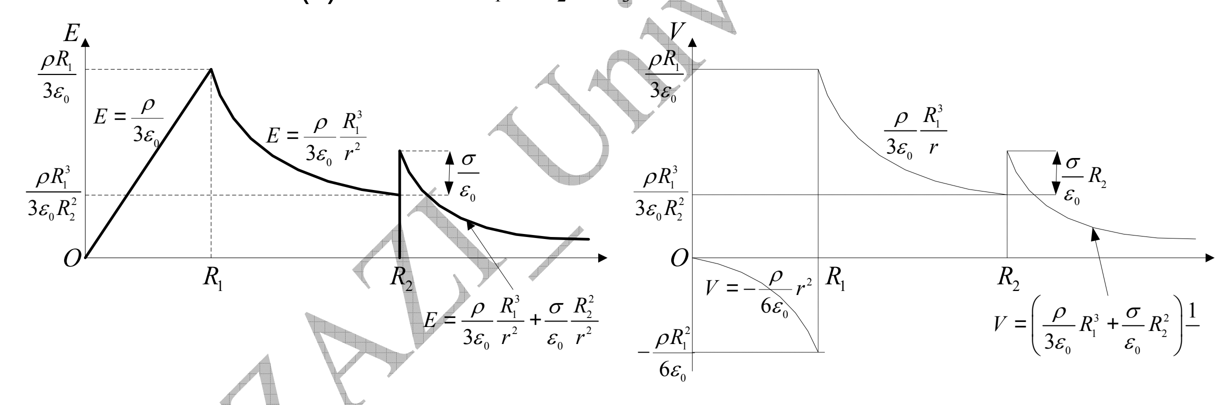
Dans la région $(R_1 \prec r \prec R_2)$ :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} dr \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + C_2}$$

Dans la région $(r \succ R_2)$ :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2} \Rightarrow V = -\int \left( \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2} \right) dr \Rightarrow \boxed{V = \left( \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2 \right)\frac{1}{r} + C_3}$$

3/ On a représenté sur les figures ci-dessous les fonctions $E(r)$ et $V(r)$ . Pour simplifier la représentation de $V(r)$ on a pris $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ .




**Exercice1.22**

1/ Le théorème de Gauss est : $\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$

a/ Quand $r \prec R_1$, cela veut dire que la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est nulle, et par conséquent le champ est nul.

Quand $r \succ R_2$, la somme des charges intérieures est nulle aussi : $Q_{\text{int}} = -\lambda l + \lambda l = 0$ , ce qui implique que le champ est nul ($l$ est la longueur du cylindre de Gauss).

b/ Quand $R_1 \prec r \prec R_2$, la charge dans la surface de Gauss est la charge que porte le cylindre interne, soit $Q_{\text{int}} = +\lambda l$ . Le champ électrique est donc :

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0 S} \\ S = \pi r^2 l \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r} \rightarrow (1)$$

2/ Pour en déduire le potentiel électrique on fait appel à la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ . Le champ étant radial, on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

- Pour $r \prec R_1$ et $r \succ R_2$ , le champ est nul, donc le potentiel dans ces deux régions est constant :

$$\boxed{E = 0 \Leftrightarrow V = C^{te}}$$

- Pour $R_1 \prec r \prec R_2$, on intègre l'expression $(1)$ correspondante du champ :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r} dr \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C}$$

Les surfaces équipotentielles sont d'autant plus rapprochées que le champ est intense, c'est à dire quand   est petit. Ceci nous amène à déduire que les surfaces équipotentielles sont rapprochées au voisinage du cylindre intérieur.

**<u>Exercice1.23</u>**

1/ D'après ce qui est consigné entre les parenthèses, $k$ et $\frac{1}{r}$ ont même dimension. On sait que la dimension de   est une longueur$(L)$. Donc la dimension de $k$ est l'inverse de la longueur : $\left[\frac{1}{r}\right] = [k] = L^{-1}$, quant à son unité dans le système international c'est $m^{-1}$.

2/ En raison de la symétrie sphérique le champ est radial :

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow E(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(2k^2 + \frac{2k}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\exp(-2kr)\vec{u}$$

3/ D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = ES = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{\text{int}} = ES$$

$$q(r) = e\left(2k^2r^2 + 2kr + 1\right)\exp(-2kr) \rightarrow (1)$$

4/ Pour $r = 0$, la charge est égale à $e$. Cela prouve que la distribution contient une charge ponctuelle $e$ située au centre $O$.

5/ $\lim_{r\to\infty} q(r) = 0$ : ceci veut dire que la charge totale de la distribution est nulle : et puisque au centre il existe une charge ponctuelle positive $e$, il doit obligatoirement exister une charge négative $-e$ répartie dans tout l'espace autour du centre $O$, telle que la somme des deux charges soit nulle.

6/ Pour cette question, on divise l'espace en sphères élémentaires de volume $dv = 4\pi r^2 dr$, et portant la charge élémentaire $dq = \rho(r)dv$. D'où :

$$dq = \rho(r)4\pi r^2 dr \rightarrow (2)$$

L'intégration de l'expression $(1)$ donne :

$$dq = -4ek^3r^2\exp(-2kr) \rightarrow (3)$$

Par identification des expression $(2)$ et $(3)$ on obtient l'expression de la densité :

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi}k^3\exp(-2kr)$$

**Exercice1.24**

1/ **Le champ électrostatique :** Par raison de symétrie, le champ est radial. On peut donc utiliser la formule $E = -\dfrac{dV}{dr}$ :

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}.\vec{u}_r}$$

2/ **Le flux du champ :** puisque la composante du champ est radiale et constante sur une sphère de rayon , le flux est donc :

$$\Phi = \iint \vec{E}\overrightarrow{dS} \Rightarrow \Phi = ES \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}}$$

La recherche des limites nous conduit aux résultats :

Quand tend vers $0$ : $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Quand tend vers $\infty$ : $\Phi = 0$

**Conclusion** : d'après le théorème de Gauss, l'expression de la charge interne de la sphère de rayon est : $Q(r) = \varepsilon_0 \Phi$. On en déduit de cela que la charge totale de la distribution est nulle et qu'au centre $O$ il existe une charge ponctuelle positive $q$.

3/ **La densité volumique de la charge :**

La charge élémentaire $dq$ enfermée entre deux sphères de rayons et $d$ est $dq = \rho(r)dV = 4\pi r^2 dr.\rho(r)$, on obtient alors :

$$\left.\begin{array}{l} \rho(r) = \dfrac{\varepsilon_0}{4\pi r^2}\dfrac{d\Phi}{dr} \\ \dfrac{d\Phi}{dr} = -\dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^2}e^{-r/a} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{1}{r}e^{-r/a}}$$

Cette densité est négative et la charge totale est $-q$.

4/ **L'étude de la fonction** : elle commence par le calcul de la dérivée, puis déterminer le point où la dérivée s'annule. Ainsi on peut déterminer l'extremum de la fonction :

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = \frac{q}{4\pi a^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = 0 \Leftrightarrow \boxed{r = a}$$

La fonction $\rho(r)$ passe par une valeur maximale en $r = a$. Pour saisir le sens de cette fonction on cherche sa dimension puis son unité :

$$\left[\rho(r)\right] = \frac{[q]}{[r]} = \frac{C}{L} \rightarrow C.m^{-1}$$

La fonction étudiée est donc la densité linéaire (ici radiale) des charges.

**Information utile :** En réalité, la distribution étudiée est celle de l'atome d'hydrogène. La charge positive $(+q)$ du proton se trouve au centre de l'atome. Ce proton constitue le noyau de l'atome autour duquel gravitent l'unique électron qui porte une charge négative $(-q)$. Quant à $a$, elle représente le rayon de Bohr qui est la distance entre le noyau et la région où il y a une forte probabilité de la présence de l'électron.

**Exercice1.25**

1/ Le potentiel électrique produit au point $M$ :

$$V_M = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} a \prec\prec r \Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r \\ r_2 - r_1 = a\cos\theta \\ p = qa \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_M = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}}$$

Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , le champ possède deux composantes $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$. A partir de la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ , on peut déterminer ces deux composantes polaires :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

Donc le champ est :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta.\vec{u}_r + \sin\theta.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$$

2/ **Equation des surfaces équipotentielles :** a partir de l'équation du potentiel trouvée précédemment, on en déduit l'équation de ces surfaces :

$$V = C^{te} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta}$$

A chaque valeur de $V_0$ correspond une surface équipotentielle située à la distance de $O$.

**Equation des lignes de champ :**

La ligne du champ $\vec{E}$ est définie comme étant colinéaire à $\overrightarrow{dl}$, donc $\vec{E} = \lambda\overrightarrow{dl}$, $(\lambda = C^{te})$. On connaît les composantes de $\vec{E}$ et les composantes de $\overrightarrow{dl}$. A partir de la relation entre les deux vecteurs on peut trouver l'équation des lignes de champ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \lambda\overrightarrow{dl} \\ \vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix}, \overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \end{pmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = r\frac{d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta} \rightarrow (1)$$

En intégrant l'équation $(1)$, on obtient à une constante près, le résultat suivant :

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\dfrac{2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\cos\theta}{r^3}}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3}}d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\int \frac{dr}{r} = 2\int \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow \ln r = 2\ln(\sin\theta) + K$$

$$\ln r - \ln(\sin^2\theta) = K \Rightarrow \ln\frac{r}{\sin^2\theta} = K \Rightarrow \frac{r}{\sin^2\theta} = K$$

De tout cela, on conclut que l'équation de la trajectoire est :

$$\boxed{r = K\sin^2\theta}$$

A chaque valeur de $K$ correspond une ligne de champ située à la distance de $O$ tel que $r = K\sin^2\theta$ .

Les lignes de champs sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.